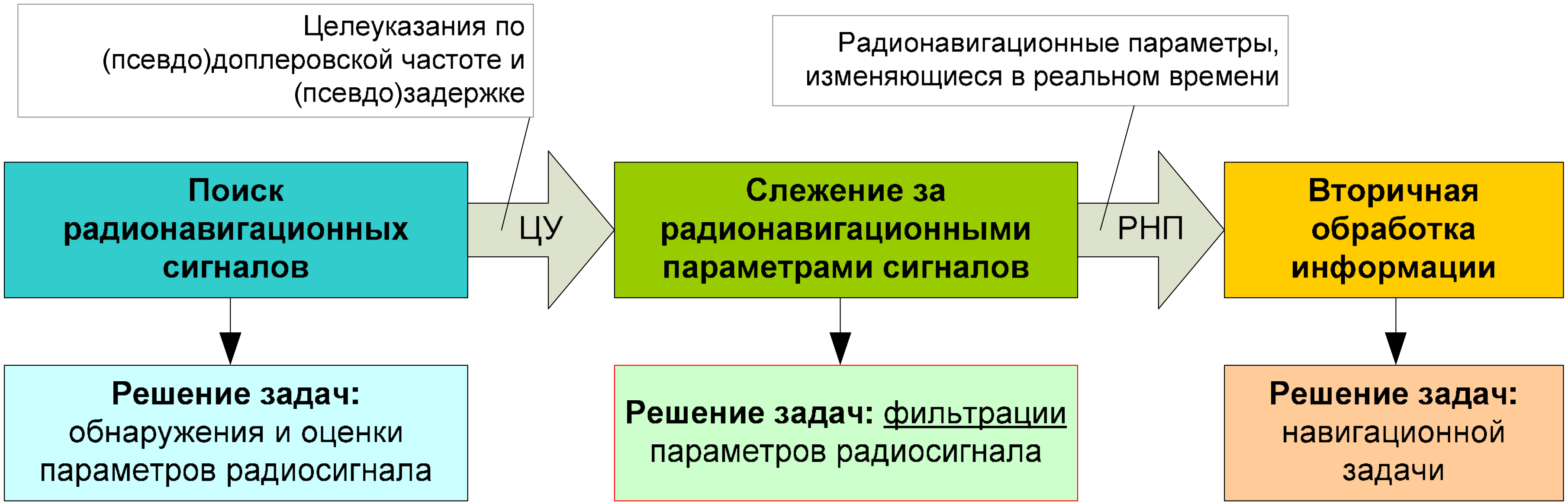
Лекция 10. Основы теории оптимальной фильтрации случайных процессов применительно к РНС

Этапы обработки сигналов в радионавигационном приемнике



* Задачу фильтрации радионавигационных параметров сигнала решают следящие системы за фазой, амплитудой, частотой и задержкой.

Постановка задачи фильтрации

Основные отличия от задачи оценивания параметров:

1. Информативные параметры меняются со временем

$$\boxed{\lambda(t) \neq const}$$

2. Требуется дать оценку процесса не для какого-то одного, а для каждого интересующего момента времени.

$y(t_k) = S\big(t_k, \lambda_k(t_k)\big) + n(t_k)$: наблюдения на интервале $[0, t_k]$

$S\big(t_k, \lambda(t_k)\big)$ – сигнал, несущий информационный процесс $\lambda(t_k)$

$n(t_k)$ - БГШ с односторонней СПМ $N_0 = 2\sigma_n^2 T$

+ известна априорная информация о $\lambda(t_k)$

Априорная информация о процессе $\lambda_k(t_k)$

В теории оптимальной фильтрации сообщение $\lambda_k(t_k)$ представляют как часть многомерного марковского процесса:

$$\lambda_k(t_k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t_k), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad k - \text{момент времени}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1})\xi_{k-1}$$

ξ_k – m-мерный вектор БГШ с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_\xi$

В каждый момент времени $\mathbf{x}_k$ является векторной с.в. и описывается априорной ПВ $p(\mathbf{x}_k, t_k)$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Из теории статистических решений оценка **x** формируется на основе АПВ **x**:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{x} p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right) d\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{x}}_k = \arg\max p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right)$$

Поэтому надо искать апостериорную плотность вероятности (АПВ) **x** на текущий момент времени *k:* $p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right)$

Рассмотрим совместную условную ПВ $p\left(\mathbf{x}_k, y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$

$$p\left(\mathbf{x}_k, y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$$

$\mathbf{Y}_0^{k-1} = y_0, y_1 \ldots y_k$ - выборка

$p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k\right) = 1/c$ - не зависит от $\mathbf{x}$;

$p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right)$ – одношаговая функция правдоподобия;

отсюда:

$$\boxed{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = cp\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)}$$

При белом гауссовском шуме наблюдений

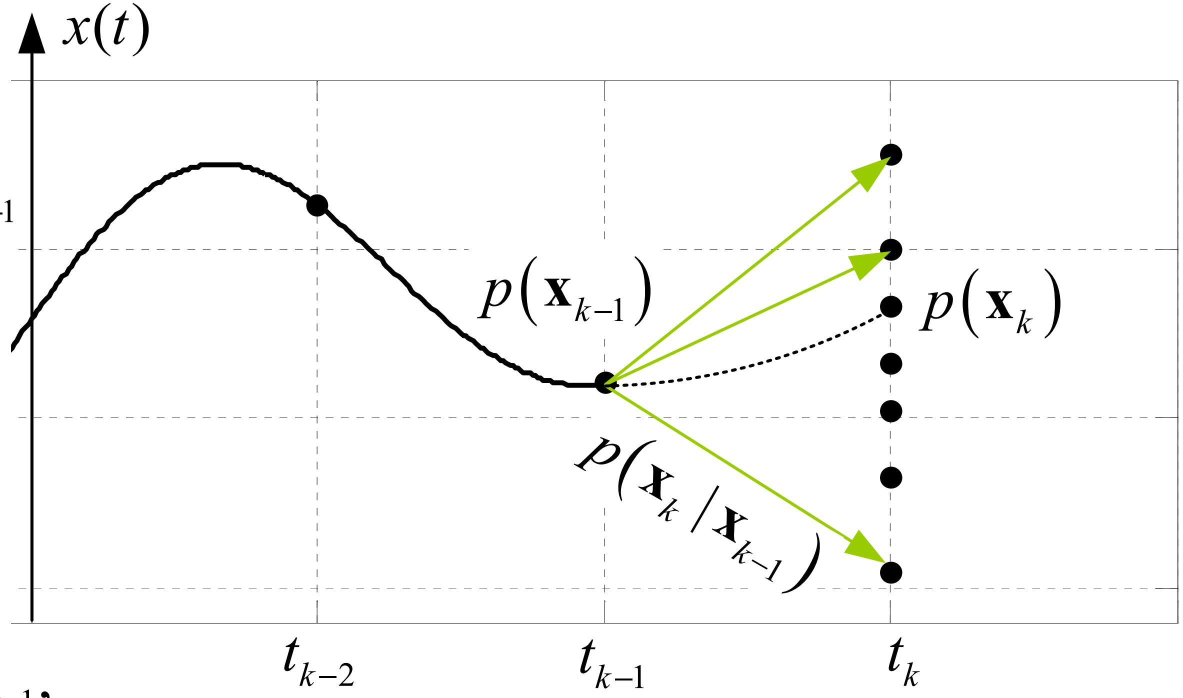
$$p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{\left(y_k - S\left(\mathbf{x}_k, t_k\right)\right)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

Плотность вероятности перехода марковского процесса

$p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}\right)$ - плотность вероятности перехода

Важное свойство МП:

$$p\left(\mathbf{x}_k\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}$$



Пример нахождения ПВ перехода для скалярного x:

$$x_k = f\left(x_{k-1}, t_{k-1}\right) + g\left(x_{k-1}, t_{k-1}\right)\xi_{k-1},$$

ξ_{k-1} - дискретный БГШ с дисперсией σ_ξ^2

$$p\left(x_k \middle| x_{k-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(x_k - f\left(x_{k-1}, t_{k-1}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 = \sigma_\xi^2 g^2\left(x_{k-1}, t_{k-1}\right)$$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Находим через ПВ перехода (условность не играет роли):

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}$$

Отсюда

$$\boxed{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k}\right) = cp\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad p\left(\mathbf{x}_0 \middle| \mathbf{Y}_0^{0}\right) = p_{ap}\left(\mathbf{x}_0\right)}$$

- уравнение Стратоновича для дискретных МП

Нормировочная константа

Одношаговая функция правдоподобия

АПВ на предыдущем шаге

ПВ перехода

Оптимальная линейная фильтрация. Постановка задачи.

Наблюдение (скалярное): $\boxed{y_k = H_k \lambda_k + n_k}$

k - номер отсчета (соотв. моменту времени t_k)

n_k - дискретный белый гауссовский шум с дисперсией σ_n^2

H_k - известный коэффициент.

Модель сообщения: $\boxed{\lambda_k = F_{k-1}\lambda_{k-1} + G_{k-1}\xi_{k-1}}$

ξ_k - дискретный БГШ с дисперсией σ_ξ^2

F_{k-1}, G_{k-1} - известные коэффициенты, $\lambda_0 \subset \mathbb{N}\left(m_\lambda, \sigma_\lambda\right)$

Уравнения оптимальной линейной фильтрации

1. $\tilde{D}_{\lambda,k} = F_{k-1}^{2} D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^{2} \sigma_{\xi}^{2}$ - дисперсия ошибки экстраполированной оценки $\tilde{\lambda}_k$

2. $D_{\lambda,k}^{-1} = \tilde{D}_{\lambda,k}^{-1} + H_k^2 \sigma_n^{-2}$ - дисперсия ошибки оценки $\hat{\lambda}_k$

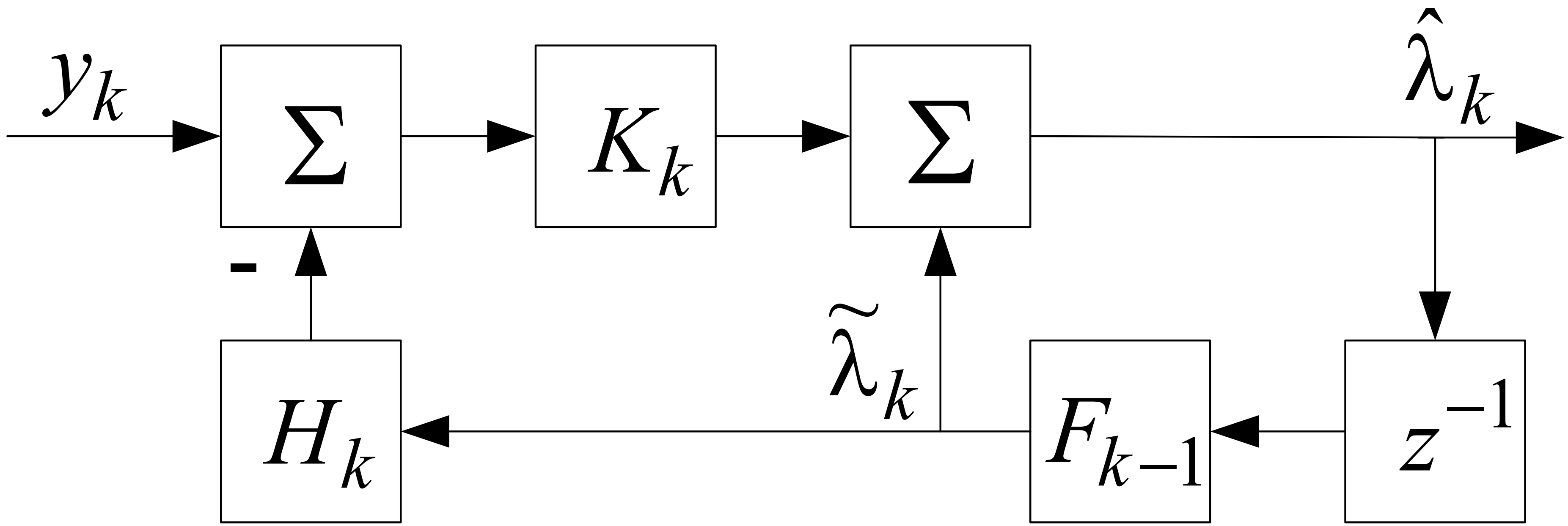
3. $K_k = H_k \dfrac{D_{\lambda,k}}{\sigma_n^2}$ - коэффициент фильтра

4. $\tilde{\lambda}_k = F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1}$ - экстраполированная оценка

5. $\left(y_k - H_k \tilde{\lambda}_{k-1} \right)$ - невязка измерений

6. $\hat{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k + K_k \left(y_k - H_k \tilde{\lambda}_{k-1} \right)$ - шаг оценивания

Схема оптимального линейного фильтра для дискретного времени в скалярном виде



Постановка задачи оптимальной линейной фильтрации для векторных наблюдений и процессов

$\underline{\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k,}$ k - момент времени,

$\mathbf{H}_k$ - известная матрица,

$\mathbf{n}_k$ - векторный ДБГШ с матрицей дисперсий $\mathbf{D}_n$,

$\mathbf{x}_k$ - многомерный марковский процесс:

$\underline{\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \boldsymbol{\xi}_{k-1},}$ $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \subset \mathbb{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{x}0}, \mathbf{R}_{\mathbf{x}0}),$

$\mathbf{F}_{k-1}, \mathbf{G}_{k-1}$ - известные матрицы,

$\boldsymbol{\xi}_k$ – векторный ДБГШ с матрицей дисперсий $\mathbf{D}_\xi$.

Уравнения оптимальной линейной фильтрации для векторных наблюдений и процессов (фильтр Калмана)

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1},$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k} = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{D}_{\mathrm{x},k-1}\mathbf{F}_{k-1}^{\mathrm{т}} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{D}_{\xi}\mathbf{G}_{k-1}^{\mathrm{т}},$$

Шаг экстраполяции

Шаг оценивания:

$$\mathbf{D}_{\mathrm{x},k} = \left(\tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k}^{-1} + \mathbf{H}_{k-1}^{\mathrm{т}}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}_{k-1}\right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_{k-1}\right)\tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{D}_{\mathrm{x},k}\mathbf{H}_k^{\mathrm{т}}\mathbf{D}_n^{-1} = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k}\mathbf{H}_k^{\mathrm{т}}\left(\mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k}\mathbf{H}_k^{\mathrm{т}} + \mathbf{D}_n\right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{x}}_k\right)$$

Оптимальная нелинейная фильтрация. Постановка задачи.

Задача фильтрации называется нелинейной, если сообщение описывается нелинейным дифференциальным (разностным) уравнением, и/или нелинейно входит в наблюдения *y(t)*

__Постановка задачи (в дискретном времени)__

Фильтруемый процесс:

$$\lambda_k = f_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right) + g_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right)\xi_{k-1}, \quad \lambda\left(t_0\right) = \lambda_0,$$

$$\xi_{k-1} \text{ - ДБГШ: } M\left[\xi_k \xi_m^{\text{т}}\right] = D_\xi \delta_{km}$$

$$f_k\left(x_k\right), \quad g_k\left(x_k\right) - \text{ известные функции}$$

Наблюдения

$$y_k = S_k(\lambda_k) + n_k,$$

n_k – ДБГШ с дисперсией σ_n^2

$S_k(\lambda_k)$ – сигнальная функция (известная).

Решение выводится из уравнения Стратоновича:

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right) = cp\left(y_k \middle| \lambda_k\right) \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) p\left(\lambda_k \middle| \lambda_{k-1}\right) d\lambda_{k-1}, \quad p\left(\lambda_0 \middle| Y_0^0\right) = \mathbb{N}\left(m_\lambda, \sigma_\lambda\right)$$

Задача нелинейной фильтрации в общем виде не решается. АПВ не является гауссовской. Уравнение Стратоновича решают приближённо. Практически, наибольшее распространение получило гауссовское приближение, при котором АПВ полагается гауссовской.

Нелинейная фильтрация многомерных МП при векторных наблюдениях*

Постановка задачи (в дискретном времени)

Фильтруемый процесс:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$\boldsymbol{\xi}_{k-1}$ - векторный ДБГШ: $M\left[\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{\xi}_m^{\text{т}}\right] = \mathbf{D}_\xi\delta_{km}$

$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) -$ известные векторные функции

Наблюдения:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k,$$

$\mathbf{n}_k -$ векторный ДБГШ: $M\left[\mathbf{n}_k\mathbf{n}_m^{\text{т}}\right] = \mathbf{D}_n\delta_{km}$

$\mathbf{S}_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) -$ сигнальная функция (известная).

$\mathbf{c} -$ определяет какие компоненты $\mathbf{x}_k$ используются в $\mathbf{S}_k$

*Не только для джедаев

Расширенный Фильтр Калмана (РФК)*

Алгоритм фильтрации по шагам

Экстраполяция

1. $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)$ - экстраполированная оценка

2. $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k} = \dfrac{\partial \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}_{\mathrm{x},k-1} \left(\dfrac{\partial \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{g}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right) \mathbf{D}_{\xi} \mathbf{g}_{k-1}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)$

   - дисперсия ошибки экстраполированной оценки $\tilde{\mathbf{x}}_k$

Оценивание

3. $\mathbf{K}_k = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k} \left(\dfrac{\partial \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\left(\dfrac{\partial \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right) \tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k} \left(\dfrac{\partial \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}_n\right)^{-1}$

   - коэффициент фильтра

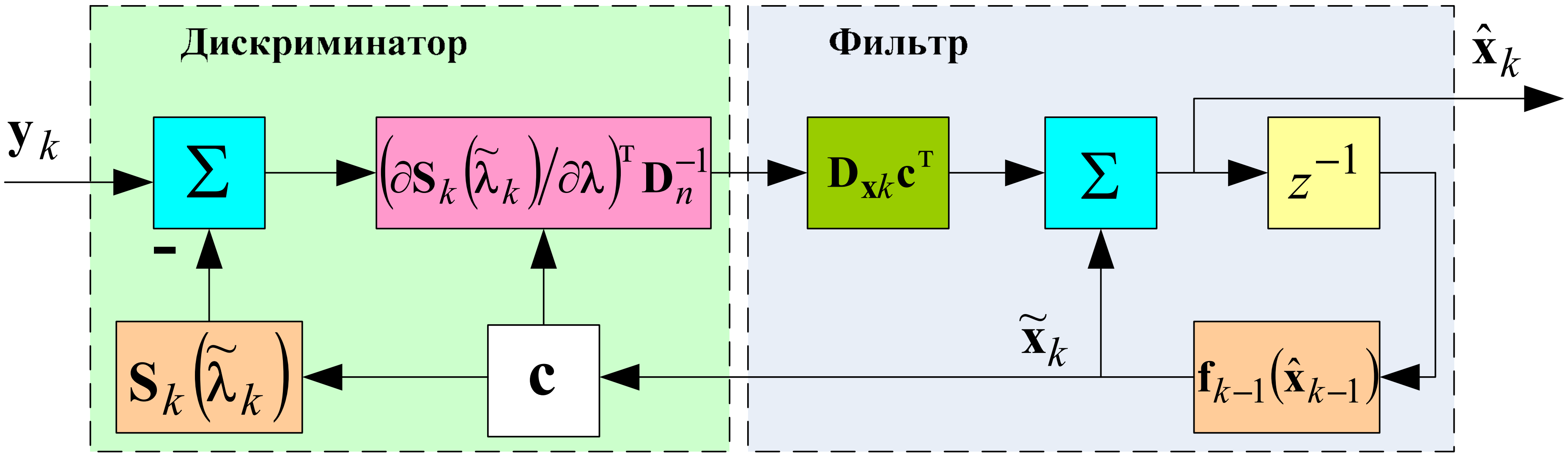
4. $\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)\right)$ - невязка измерений

5. $\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)\right)$ - шаг оценивания

6. $\mathbf{D}_{\mathrm{x},k} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\left(\dfrac{\partial \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)\right)\tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k}$ - дисперсия ошибки оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$

*Extended Kalman Filter (EKF)

Схема дискретной оптимальной системы фильтрации (схема РФК)



$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_n^{-1} \left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right) \right) = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}_{\text{д}k}$$

$$\boxed{\mathbf{u}_{\text{д}k} = \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_n^{-1} \left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right) \right)}$$

Определение дискриминатора:

Это производная логарифма функционала правдоподобия по параметру!!!