

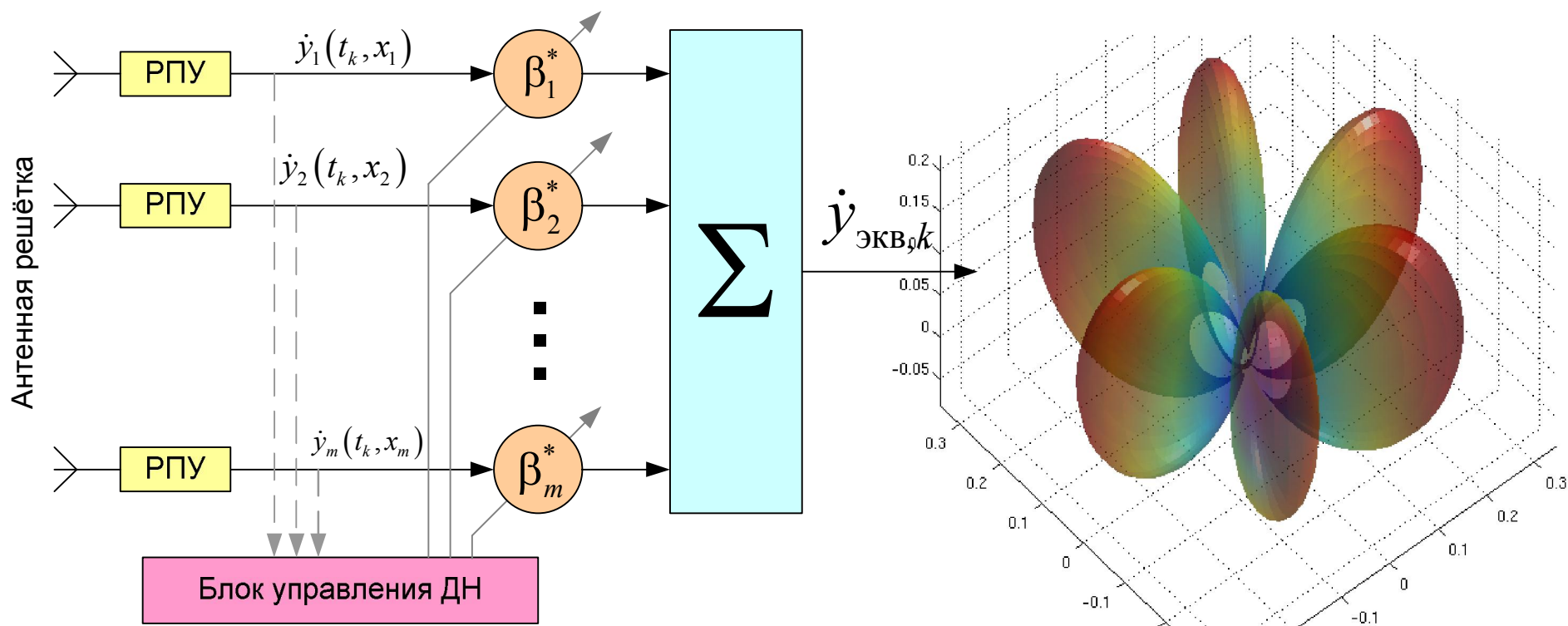
## Занятие 18.

# Характеристики алгоритмов пространственной обработки сигналов

- Характеристика направленности, диаграмма направленности.
- Коэффициент эффективности.
- Время адаптации.

# Характеристика направленности

Взвешенное суммирование сигналов от разных антенн является по сути формированием диаграммы направленности (ДН) антенной решётки.



Если взвешенное суммирование осуществляется в цифровом виде, то ДН является, по сути, «виртуальной». Вектор входных сигналов можно распараллелить и сформировать бесконечное множество таких «виртуальных» ДН.

# Характеристика направленности

## Определение

*Характеристикой направленности* в теории пространственно-временной обработки сигналов называют зависимость комплексной амплитуды  $\dot{U}_c(\alpha_{c0}|\alpha_c, \mathbf{a}_\Pi)$  на выходе системы пространственной обработки от направления прихода  $\alpha_{c0}$  пробного сигнала (гармонической плоской волны) при заданных направлениях прихода полезного  $\alpha_c$  и мешающих  $\mathbf{a}_\Pi$  (если они есть) сигналов.

Функция  $U_H(\alpha_{c0}|\alpha_c, \mathbf{a}_\Pi) = |\dot{U}_c(\alpha_{c0}|\alpha_c, \mathbf{a}_\Pi)|^2$  называется *диаграммой направленности*.

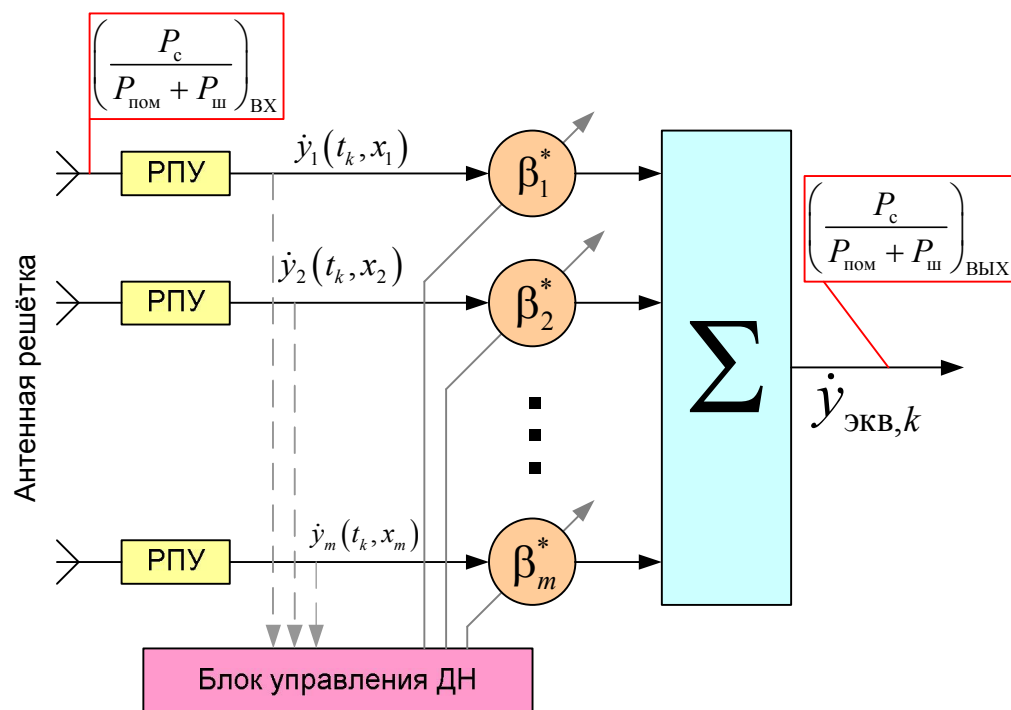
Расчёт характеристики направленности:

$$\dot{U}_c(\alpha_{c0}|\alpha_c, \mathbf{a}_\Pi) = \dot{\mathbf{\beta}}^{*T}(\alpha_c, \mathbf{a}_\Pi) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{c0}) \cdot \dot{F}(\alpha_{c0})$$

$\dot{F}(\alpha_{c0})$  – характеристика направленности одного антенного элемента

# Коэффициент эффективности

Определение. Коэффициент эффективности показывает во сколько раз увеличивается отношение сигнал/(помеха + шум) (ОСПШ) на выходе блока пространственной обработки сигналов по сравнению с ОСПШ на его входе.



$$K_{\text{эф}} = \frac{\left( \frac{P_c}{P_{\text{ПОМ}} + P_{\text{Ш}}} \right)_{\text{ВЫХ}}}{\left( \frac{P_c}{P_{\text{ПОМ}} + P_{\text{Ш}}} \right)_{\text{ВХ}}}$$

# Коэффициент эффективности

Найдём ОСПШ на выходе блока пространственной обработки сигналов. Для этого рассмотрим эквивалентные наблюдения.

$$\dot{y}_{\text{ЭКВ},k} = \dot{\mathbf{\beta}}^{*\text{T}}(\alpha_c, \alpha_{\Pi}) \dot{y}_k = \dot{S}_{\text{H}}(t_k, \lambda_k) + \dot{n}_{\text{ЭКВ},k}$$

$$P_{\text{с,ВЫХ}} = M \left[ \left| \dot{S}_{\text{H}}(t_k, \lambda_k) \right|^2 \right] = 1$$

$$(P_{\text{ПОМ}} + P_{\text{Ш}})_{\text{ВЫХ}} = M \left[ \left| \dot{n}_{\text{ЭКВ},k} \right|^2 \right] = D_{N_{\text{ЭКВ}}}(\alpha_c, \alpha_{\Pi}) = \left( \dot{\mathbf{H}}^{*\text{T}}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) \right)^{-1}$$

Отсюда

$$\left( \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ПОМ}} + P_{\text{Ш}}} \right)_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{D_{N_{\text{ЭКВ}}}(\alpha_c, \alpha_{\Pi})} = \left( \dot{\mathbf{H}}^{*\text{T}}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_{\Pi}) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) \right),$$

$$\text{где } \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\alpha_{\Pi}) = \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\Pi}) \dot{\mathbf{V}}_{\Pi} \dot{\mathbf{C}}^{*\text{T}}(\alpha_{\Pi}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}$$

# Коэффициент эффективности

Найдём ОСПШ на входе блока пространственной обработки сигналов:

$$P_{c,ВХ} = P_c - \text{задано}; \quad (P_{\text{пом}} + P_{\text{ш}})_{ВХ} = P_{\text{пом,ВХ}} + \sigma_n^2$$

$P_{\text{пом,ВХ}}$  – суммарная мощность помех на выходе

одного антенного элемента. Если помехи некоррелированы,

то  $P_{\text{пом,ВХ}}$  – одинакова для всех АЭ и равна любому диагональному

элементу матрицы  $\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{a}_{\Pi}) \dot{\mathbf{V}}_{\Pi} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\mathbf{a}_{\Pi})$ . Поэтому можно считать, что

$(P_{\text{пом}} + P_{\text{ш}})_{ВХ} = D_{n\Sigma,(1,1)}$  - 1-й диагональный элемент матрицы  $\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}$

Отсюда 
$$K_{\text{эф}}(\alpha_c, \mathbf{a}_{\Pi}) = \frac{(P_c / (P_{\text{пом}} + P_{\text{ш}}))_{\text{ВЫХ}}}{(P_c / (P_{\text{пом}} + P_{\text{ш}}))_{\text{ВХ}}} = \frac{\dot{\mathbf{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\mathbf{a}_{\Pi}) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c)}{P_c / D_{n\Sigma,(1,1)}}$$

# Коэффициент эффективности

Вспомним, что  $\dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) = \sqrt{P_c} \left| e^{j\phi_1(\alpha_c)} \ e^{j\phi_2(\alpha_c)} \ \dots \ e^{j\phi_m(\alpha_c)} \right|^T = \sqrt{P_c} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_c),$

где  $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_c) = \left| e^{j\phi_1(\alpha_c)} \ e^{j\phi_2(\alpha_c)} \ \dots \ e^{j\phi_m(\alpha_c)} \right|^T$

Определим суммарную мощность помех как  $V_{\Pi,\Sigma} = \text{tr}(\mathbf{V}_{\Pi})$  (полагаем помехи некоррелированными,

на практике это так). Определим отношение помеха/шум как  $q_{\Pi/\text{ш}} = \frac{V_{\Pi,\Sigma}}{\sigma_n^2}$ , тогда  $\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\alpha_{\Pi}) =$

$$= \sigma_n^2 \left( \frac{V_{\Pi,\Sigma}}{\sigma_n^2} \frac{1}{V_{\Pi,\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\Pi}) \mathbf{V}_{\Pi} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\alpha_{\Pi}) + \mathbf{I} \right) = \sigma_n^2 \left( q_{\Pi/\text{ш}} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\Pi}) \frac{\mathbf{V}_{\Pi}}{V_{\Pi,\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\alpha_{\Pi}) + \mathbf{I} \right), \quad D_{n\Sigma,(1,1)} = V_{\Pi,\Sigma} + \sigma_n^2 = \sigma_n^2 (1 + q_{\Pi/\text{ш}})$$

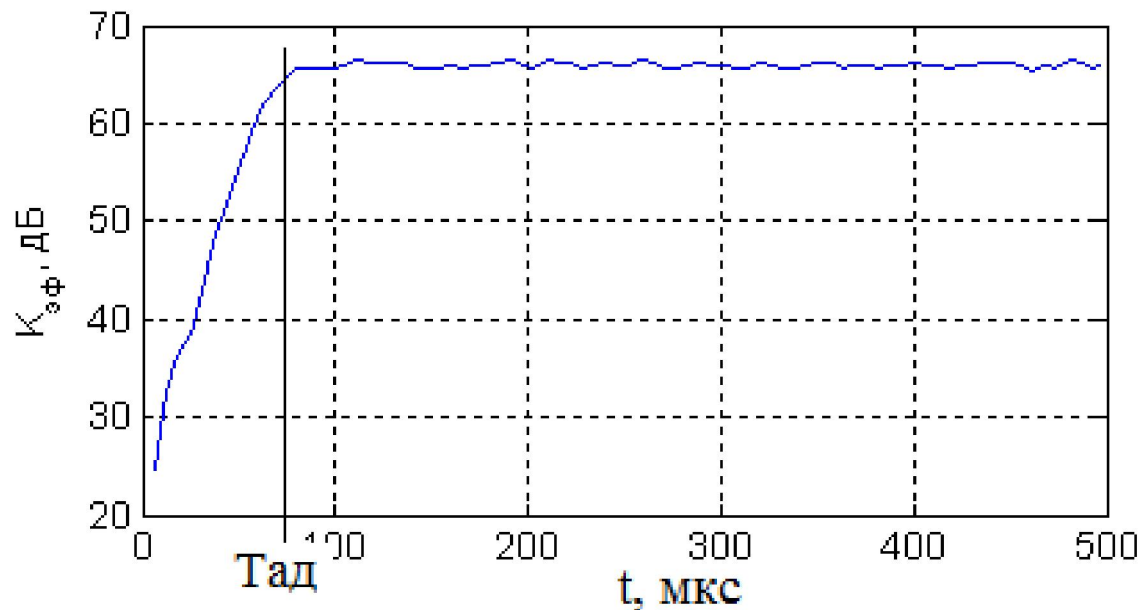
Тогда в выражении для  $k$ -та эффективности мощность сигнала и дисперсия шума сокращаются:

$$K_{\text{эф}}(\alpha_c, \alpha_{\Pi}) = (1 + q_{\Pi/\text{ш}}) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{*T}(\alpha_c) \left( q_{\Pi/\text{ш}} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\Pi}) \frac{\mathbf{V}_{\Pi}}{V_{\Pi,\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\alpha_{\Pi}) + \mathbf{I} \right)^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_c)$$

Вывод: Кэф зависит только от отношения помеха/шум, от пространственных направлений на источники помех и сигнала и от распределения относительных мощностей помех

# Время адаптации

На практике направления прихода полезного сигнала  $\alpha_c$  и/или помех  $\alpha_{II}$  как правило неизвестны. Необходимо строить адаптивную систему, явно или неявно оценивающую эти направления. В процессе такого оценивания  $K_{эф}$  повышается до установившегося значения.

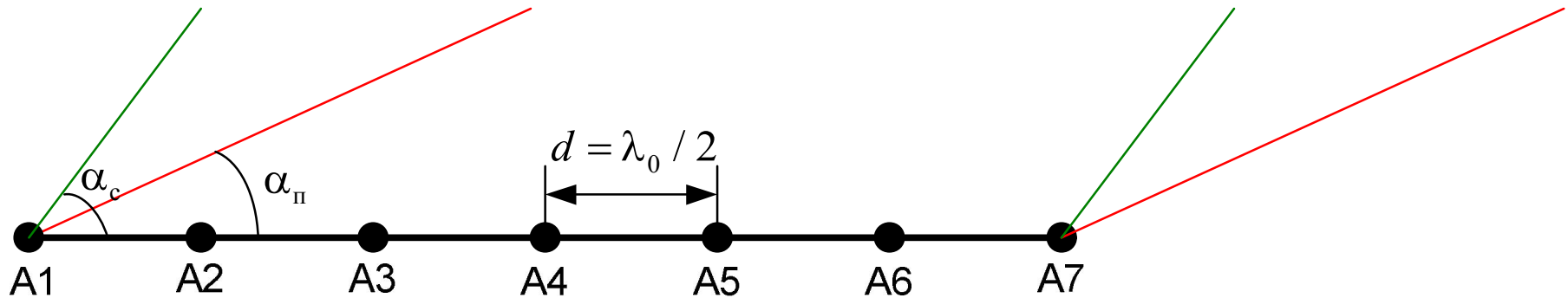


Под временем адаптации понимают время, за которое  $K_{эф}$  достигает установившегося значения.



# Пример

7-элементная линейная антенная решётка из ненаправленных элементов. Действует 1 помеха.



$$\alpha_n = 30^\circ, \alpha_c = 60^\circ, \dot{F}(\alpha) = 1, m = 7, p = 1, q_{\text{п/ш}} = 10, d = \lambda_0 / 2$$

1. Найдём матрицы  $\dot{\mathbf{H}}(\alpha_c)$  и  $\dot{\mathbf{C}}(\alpha_n)$ :

$$\dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) = \left| e^{j\phi_1(\alpha_c)} \quad e^{j\phi_2(\alpha_c)} \quad \dots \quad e^{j\phi_7(\alpha_c)} \right|^T, \quad \phi_i(\alpha_c) = \frac{2\pi d(i-1)\cos(\alpha_c)}{\lambda_0} = \pi(i-1)\cos(60^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) = \left| 1 \quad e^{j\pi/2} \quad e^{j\pi} \quad e^{j3\pi/2} \quad e^{j2\pi} \quad e^{j5\pi/2} \quad e^{j3\pi} \right|^T;$$

$$\dot{\mathbf{C}}(\alpha_n) = \left| e^{j\phi_{\text{п}1}(\alpha_n)} \quad e^{j\phi_{\text{п}2}(\alpha_n)} \quad \dots \quad e^{j\phi_{\text{п}7}(\alpha_n)} \right|^T, \quad \phi_{\text{п}i}(\alpha_n) = \frac{2\pi d(i-1)\cos(\alpha_n)}{\lambda_0} = \pi(i-1)\cos(30^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{C}}(\alpha_n) = \left| 1 \quad e^{j\pi\sqrt{3}/2} \quad e^{j\pi\sqrt{3}} \quad e^{j3\pi\sqrt{3}/2} \quad e^{j2\pi\sqrt{3}} \quad e^{j5\pi\sqrt{3}/2} \quad e^{j3\pi\sqrt{3}} \right|^T$$

# Пример

## 2. Найдём характеристику направленности

$$\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \alpha_\Pi) = \dot{\beta}^{*T}(\alpha_c, \alpha_\Pi) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{c0}) \cdot \dot{F}(\alpha_{c0})$$

$$\dot{F}(\alpha_{c0}) = 1; \quad \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{c0}) = \sqrt{P_c} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_{c0}); \quad \beta(\alpha_c, \alpha_\Pi) = \frac{\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c)}{\dot{\mathbf{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c)}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_{c0}) = \left| e^{j\phi_1(\alpha_{c0})} \quad e^{j\phi_2(\alpha_{c0})} \quad \dots \quad e^{j\phi_7(\alpha_{c0})} \right|^T, \quad \phi_i(\alpha_c) = \frac{2\pi d(i-1)\cos(\alpha_{c0})}{\lambda_0} = \pi(i-1)\cos(\alpha_{c0})$$

$$\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \alpha_\Pi) = \frac{\dot{\mathbf{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi)}{\dot{\mathbf{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c)} \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{c0}) =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{P_c}} \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_{c0}) \cancel{\sqrt{P_c}}}{\cancel{\sqrt{P_c}} \dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_c) \cancel{\sqrt{P_c}}} = \frac{\dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_{c0})}{\dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_c)};$$

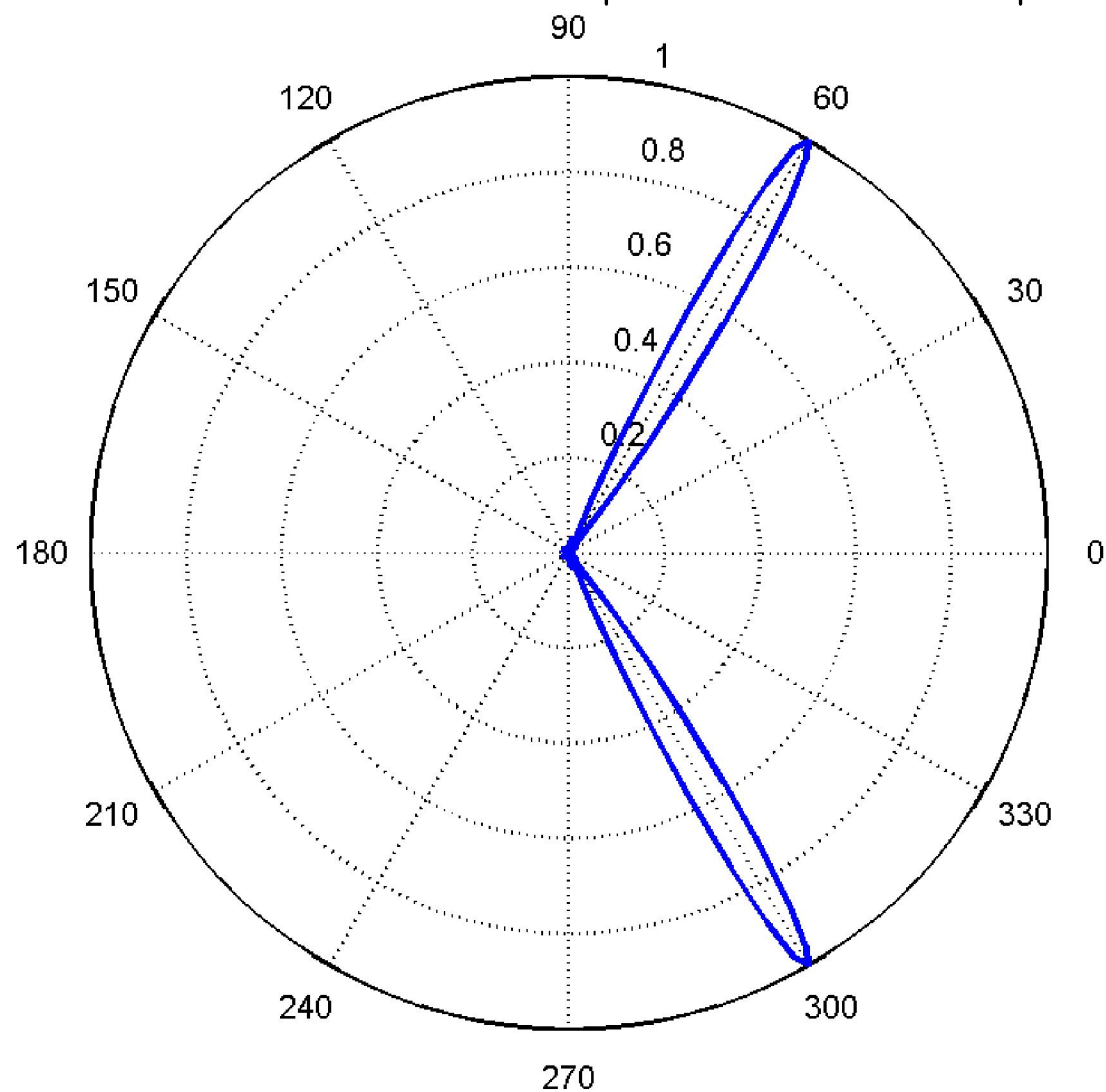
$$\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\alpha_\Pi) = \sigma_n^2 \left( q_{\Pi/\Sigma} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_\Pi) \frac{\mathbf{V}_\Pi}{V_{\Pi,\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\alpha_\Pi) + \mathbf{I} \right), \quad \mathbf{V}_\Pi = V_{\Pi,\Sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \alpha_\Pi) = \frac{\dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{*T}(\alpha_c) \left( q_{\Pi/\Sigma} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_\Pi) \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\alpha_\Pi) + \mathbf{I} \right)^{-1} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_{c0})}{\dot{\tilde{\mathbf{H}}}^{*T}(\alpha_c) \left( q_{\Pi/\Sigma} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_\Pi) \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\alpha_\Pi) + \mathbf{I} \right)^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\alpha_c)}$$

# Пример

Построим диаграмму направленности, которая

определена как  $U_H(\alpha_{c0} | \alpha_c, \mathbf{a}_H) = |\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \mathbf{a}_H)|^2$



# Пример

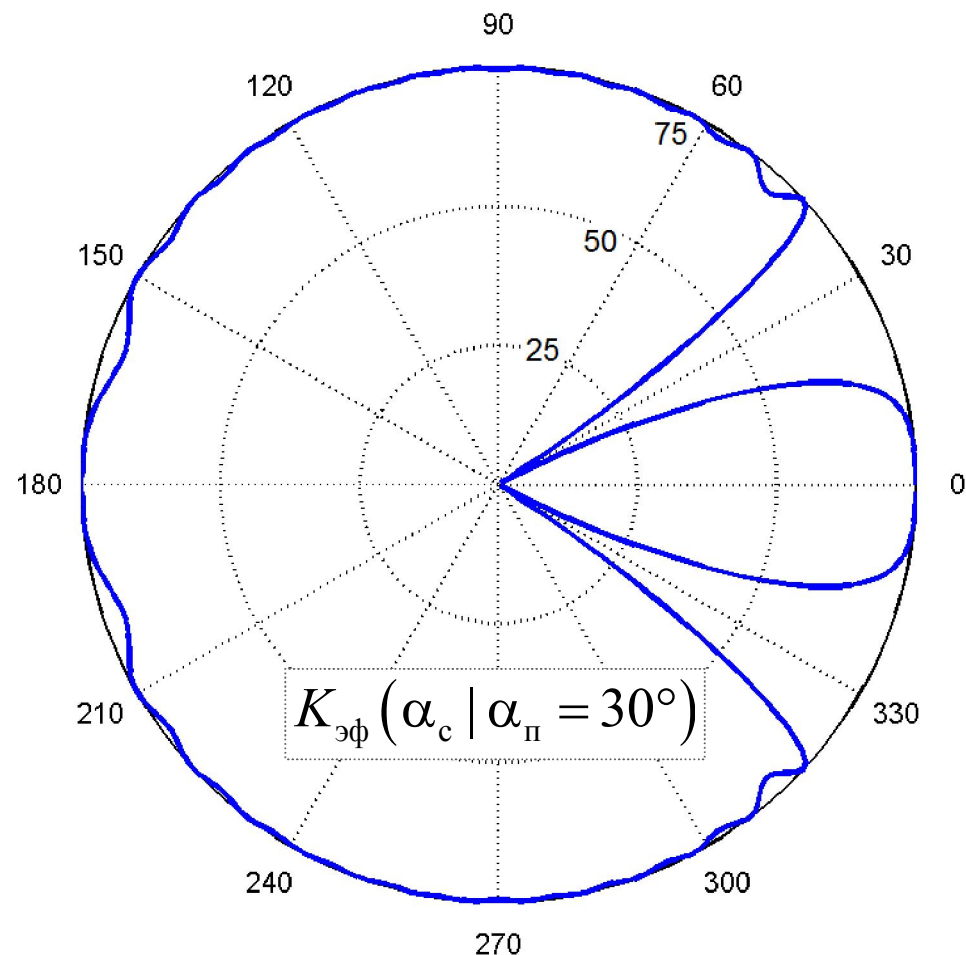
## 3. Найдём коэффициент эффективности

$$K_{\text{эф}}(\alpha_c, \alpha_{\text{п}}) = (1 + q_{\text{п/ш}}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{*\text{T}}(\alpha_c) \left( q_{\text{п/ш}} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\text{п}}) \frac{\mathbf{V}_{\text{п}}}{V_{\text{п},\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}^{*\text{T}}(\alpha_{\text{п}}) + \mathbf{I} \right)^{-1} \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c), \quad \mathbf{V}_{\text{п}} = V_{\text{п},\Sigma} \Rightarrow$$

$$K_{\text{эф}} = (1 + q_{\text{п/ш}}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{*\text{T}}(\alpha_c) \left( q_{\text{п/ш}} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\text{п}}) \dot{\mathbf{C}}^{*\text{T}}(\alpha_{\text{п}}) + \mathbf{I} \right)^{-1} \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) = 73,9 \quad (\text{раза})$$

$$K_{\text{эф}} [\text{дБ}] = 10 \lg(K_{\text{эф}}) = 18,7 \text{ дБ}$$

Зависимость  
коэффициента  
эффективности от  
направления на  
источник сигнала ( $\alpha_c$ )  
при фиксированном  
направлении на  
источник помехи  $\alpha_{\text{п}} = 30^\circ$



**Спасибо за внимание и  
успешной подготовки к зачёту!**

