

# Лекция 8. Оптимальная линейная фильтрация. Постановка задачи.

Наблюдение (скалярное):

$$y_k = H_k \lambda_k + n_k$$

$k$  - номер отсчета (соотв. моменту времени  $t_k$ )

$n_k$  - дискретный белый гауссовский шум с дисперсией  $\sigma_n^2$

$H_k$  - известный коэффициент.

Модель сообщения:

$$\lambda_k = F_{k-1} \lambda_{k-1} + G_{k-1} \xi_{k-1}$$

$\xi_k$  - дискретный БГШ с дисперсией  $\sigma_\xi^2$

$F_{k-1}, G_{k-1}$  - известные коэффициенты,  $\lambda_0 \subset \mathbb{N}(m_\lambda, \sigma_\lambda)$

# Решение задачи линейной фильтрации

Для поставленной задачи уравнение Стратоновича имеет строгое решение.

$$p(\lambda_k | Y_0^k) = c p(y_k | \lambda_k) \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) p(\lambda_k | \lambda_{k-1}) d\lambda_{k-1}, \quad p(\lambda_0 | Y_0^0) = \mathbb{N}(m_\lambda, \sigma_\lambda)$$

$$p(y_k | \lambda_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left\{-\frac{(y_k - H_k \lambda_k)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p(\lambda_k | \lambda_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2}} \exp\left\{-\frac{(\lambda_k - F_{k-1} \lambda_{k-1})^2}{2G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2}\right\}$$

Апостериорная ПВ  $p(\lambda_k | Y_0^k)$  - гауссовская!

# Решение задачи линейной фильтрации

Гауссовская АПВ имеет только 2 момента (матожидание и дисперсию) и может быть полностью ими описана:

$$\hat{\lambda}_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k-1} p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) d\lambda_{k-1} \quad - \text{оценка}$$

$$D_{\lambda, k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1})^2 p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) d\lambda_{k-1} \quad - \text{дисперсия ошибки}$$

$$p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda, k-1}}} \exp\left(-\frac{(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2D_{\lambda, k-1}}\right)$$

# Решение задачи линейной фильтрации

Подставим выражения для всех ПВ в уравнение Стратоновича

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) p(\lambda_k | \lambda_{k-1}) d\lambda_{k-1} = p(\lambda_k | Y_0^{k-1}) = \\ & = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(\lambda_k - F_{k-1} \lambda_{k-1})^2}{2G_{k-1}^2 \sigma_{\xi}^2} \right\} \exp \left( -\frac{(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2D_{\lambda, k-1}} \right) d\lambda_{k-1} = \\ & = c_2 \exp \left\{ -\frac{(\lambda_k - F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2(F_{k-1}^2 D_{\lambda, k-1} + G_{k-1}^2 \sigma_{\xi}^2)} \right\} \end{aligned}$$

# Решение задачи линейной фильтрации

Подставим выражения для всех ПВ в уравнение Стратоновича

$$\begin{aligned} p(\lambda_k | Y_0^k) &= c \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left\{-\frac{(y_k - H_k \lambda_k)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \cdot c_2 \exp\left\{-\frac{(\lambda_k - F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2(F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2)}\right\} = \\ &= c_3 \exp\left\{-\frac{(\lambda_k - F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2(F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2)} - \frac{(y_k - H_k \lambda_k)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \end{aligned}$$

Запишем АПВ в виде

$$p(\lambda_k | Y_0^k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda,k}}} \exp\left(-\frac{(\lambda_k - \hat{\lambda}_k)^2}{2D_{\lambda,k}}\right) = c_4 \exp\left\{-\frac{1}{D_{\lambda,k}} \frac{\lambda_k^2}{2} + \hat{\lambda}_k \frac{\lambda_k}{D_{\lambda,k}}\right\}$$

# Решение задачи линейной фильтрации

Найдём коэффициенты  $a$  и  $b$  при  $\lambda_k$  и  $\lambda_k^2$

$$p(\lambda_k | Y_0^k) = c_3 \exp \left\{ -\frac{(\lambda_k - F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2(F_{k-1}^2 D_{\lambda, k-1} + G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2)} - \frac{(y_k - H_k \lambda_k)^2}{2\sigma_n^2} \right\} = c_4 \exp \{ b\lambda_k^2 + a\lambda_k \},$$

$$\left( a = \frac{\hat{\lambda}_k}{D_{\lambda, k}}, b = -\frac{1}{2D_{\lambda, k}} \Rightarrow D_{\lambda, k} = -\frac{1}{2b}, \hat{\lambda}_k = -\frac{a}{2b} \right)$$

Отсюда

$$\hat{\lambda}_k = F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1} + H_k \frac{D_{\lambda, k}}{\sigma_n^2} (y_k - H_k F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1}),$$
$$\frac{1}{D_{\lambda, k}} = \frac{1}{F_{k-1}^2 D_{\lambda, k-1} + G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2} + \frac{H_k^2}{\sigma_n^2}$$

# Уравнения оптимальной линейной фильтрации

1.  $\tilde{D}_{\lambda,k} = F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2 \sigma_{\xi}^2$  - дисперсия ошибки

экстраполированной оценки  $\tilde{\lambda}_k$

2.  $D_{\lambda,k}^{-1} = \tilde{D}_{\lambda,k}^{-1} + H_k^2 \sigma_n^{-2}$  - дисперсия ошибки оценки  $\hat{\lambda}_k$

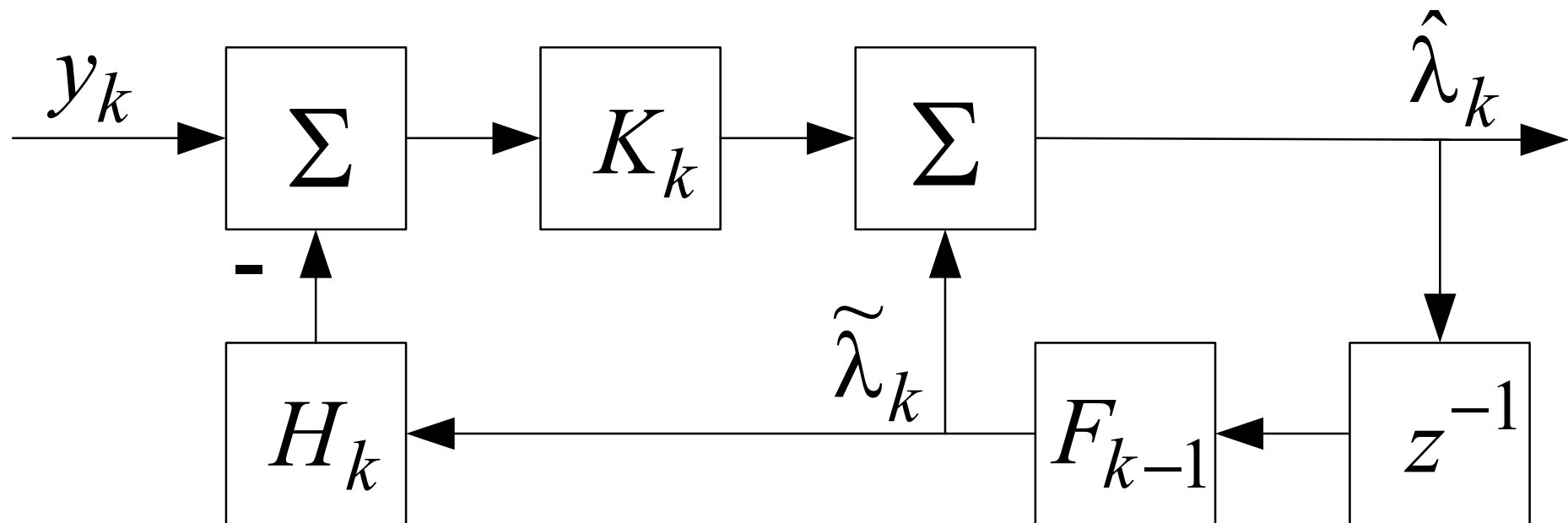
3.  $K_k = H_k \frac{D_{\lambda,k}}{\sigma_n^2}$  - коэффициент фильтра

4.  $\tilde{\lambda}_k = F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1}$  - экстраполированная оценка

5.  $(y_k - H_k \tilde{\lambda}_{k-1})$  - невязка измерений

6.  $\hat{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k + K_k (y_k - H_k \tilde{\lambda}_{k-1})$  - шаг оценивания

# Схема оптимального линейного фильтра для дискретного времени в скалярном виде





# Постановка задачи оптимальной линейной фильтрации для векторных наблюдений и процессов

$$\underline{y_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k}, \quad k - \text{момент времени,}$$

$\mathbf{H}_k$  - известная матрица,

$\mathbf{n}_k$  - векторный ДБГШ с матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_n$ ,

$\mathbf{x}_k$  - многомерный марковский процесс:

$$\underline{\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \boldsymbol{\xi}_{k-1}}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \subset \mathbb{N}(\mathbf{m}_{x0}, \mathbf{R}_{x0}),$$

$\mathbf{F}_{k-1}$ ,  $\mathbf{G}_{k-1}$  - известные матрицы,

$\boldsymbol{\xi}_k$  - векторный ДБГШ с матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_\xi$ .

# Уравнения оптимальной линейной фильтрации для векторных наблюдений и процессов (фильтр Калмана)

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1},$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{x,k} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{D}_{x,k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{D}_\xi \mathbf{G}_{k-1}^T,$$

Шаг экстраполяции

Шаг оценивания:

$$\mathbf{D}_{x,k} = \left( \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}^{-1} + \mathbf{H}_{k-1}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H}_{k-1} \right)^{-1} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_{k-1} \right) \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{D}_{x,k} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_n^{-1} = \tilde{\mathbf{D}}_{x,k} \mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{D}}_{x,k} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{D}_n \right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_k \right)$$

# Постановка задачи оптимальной линейной фильтрации в непрерывном времени

$$\underline{y(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t)}, \text{ - наблюдения}$$

$\mathbf{H}(t)$  – известная матричная функция времени,

$\mathbf{n}(t)$  – векторный БГШ с корр. матрицей  $\mathbf{N}_n(\tau) = \mathbf{S}_n/2 \cdot \delta(\tau)$ ,

$$\underline{\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t) \mathbf{x} + \mathbf{G}(t) \xi(t)}, \quad \mathbf{x}(0) \subset \mathbb{N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{D}_{x0})$$

$\mathbf{F}(t)$ ,  $\mathbf{G}(t)$  - известные матричные функции,

$\xi(t)$  - векторный БГШ с корр. матрицей  $\mathbf{R}_\xi(\tau) = \mathbf{S}_\xi/2 \cdot \delta(\tau)$

# Уравнения оптимальной линейной фильтрации в непрерывном времени

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)(\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{D}_x(t)\mathbf{H}^T(t)2\mathbf{N}_n^{-1}$$

$$\frac{d\mathbf{D}_x}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{D}_x + \mathbf{D}_x\mathbf{F}^T(t) + \frac{1}{2}\mathbf{G}(t)\mathbf{S}_\xi\mathbf{G}^T(t) -$$

$$-\mathbf{D}_x\mathbf{H}^T(t)2\mathbf{N}_n^{-1}\mathbf{H}(t)\mathbf{D}_x^T, \quad \mathbf{D}_x(0) = \mathbf{D}_{x0}$$

# Пример схемы линейного скалярного фильтра для непрерывного времени в виде следящей системы

