Теория случайных процессов и статистического синтеза РТУ

Преподаватель:
Шатилов Александр
shatilov@srns.ru

Информация: http://srns.ru -> Курс радионавигации

Литература

1. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2003.
2. Замолодчиков В.Н., Чиликин В.М. Синтез дискриминаторов и фильтров радиотехнических следящих систем. – М.: Изд-во МЭИ, 1993.

Занятие 1. Статистическое описание событий и процессов

Практическое понятие вероятности

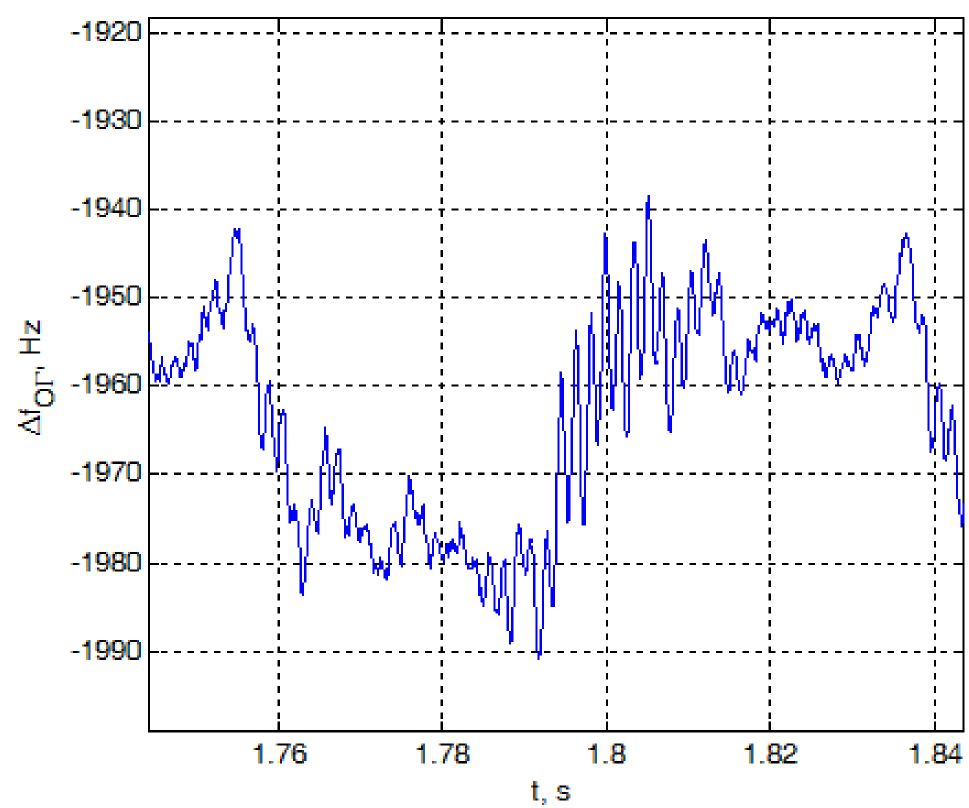
Если имеется N результатов экспериментов, среди которых событие $A = A_i$ наступило $n_A(i)$ раз, то вероятность такого события определяется как $P(A = A_i) = \lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{n_A(i)}{N}$

Случайные величины

Дискретные

```
28 27 42 65 67 69 6E 2E|2E 2E 27 29 3B 0D 0A 58
73 3D 5B 32 2E 36 39 33|20 32 2E 34 32 20 30 3B
0D 0A 20 20 20 20 2D 30|2E 31 31 35 20 34 2E 36
34 31 20 31 2E 37 30 39|3B 0D 0A 20 20 20 20 36
2E 33 36 39 20 33 2E 38|34 32 20 31 2E 31 36 37
3B 0D 0A 20 20 20 20 32|2E 37 33 34 20 30 20 32
2E 35 32 36 5D 3B 0D 0A|0D 0A 49 4E 50 55 54 5F
46 49 4C 45 20 3D 20 27|64 61 6C 6E 2E 74 78 74
27 3B 0D 0A 4F 55 54 50|55 54 5F 46 49 4C 45 20
3D 20 27 63 6F 6F 72 64|73 2E 74 78 74 27 3B 0D
0A 69 6E 70 66 69 64 20|3D 20 66 6F 70 65 6E 28
49 4E 50 55 54 5F 46 49|4C 45 2C 27 72 27 29 3B
0D 0A 6F 75 74 66 69 64|20 3D 20 66 6F 70 65 6E
28 4F 55 54 50 55 54 5F|46 49 4C 45 2C 27 77 27
29 3B 0D 0A 53 20 3D 20|66 67 65 74 6C 28 69 6E
70 66 69 64 29 3B 0D 0A|44 69 7A 6D 20 3D 20 7A
65 72 6F 73 28 34 2C 31|29 3B 0D 0A 66 70 72 69
6E 74 66 28 6F 75 74 66|69 64 2C 27 70 6F 69 6E
74 23 20 58 5B 6D 5D 20|59 5B 6D 5D 20 5A 5B 6D
5D 20 50 44 4F 50 5C 6E|27 29 3B 0D 0A 0D 0A 77
68 69 6C 65 20 28 7E 66|65 6F 66 28 69 6E 70 66
69 64 29 29 0D 0A 20 20|20 20 0D 0A 20 20 20 20
70 6E 74 20 3D 20 66 73|63 61 6E 66 28 69 6E 70
66 69 64 2C 27 25 78 27|2C 31 29 3B 0D 0A 20 20
20 20 69 66 20 28 66 65|72 72 6F 72 28 69 6E 70
```

Непрерывные

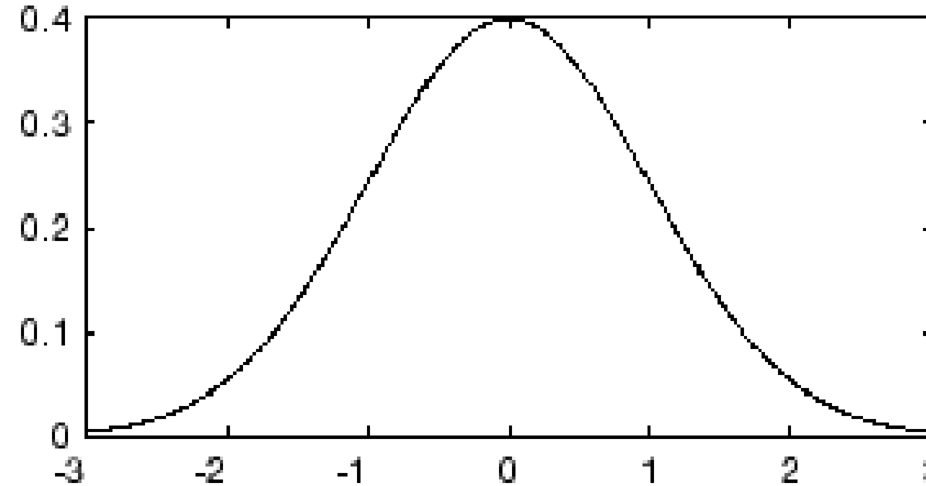


Плотность вероятности (ПВ)

$$p(x) \equiv p(X = x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Нормальное (гауссовское) распределение

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_X}} \exp\left(-\frac{(x - m_X)^2}{2D_X} \right)$$



Преобразование случайных величин и их плотностей вероятностей

$$Y = f(X); \quad X = f^{-1}(Y) = h(Y)$$

$$p_Y(y) = p_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

Если h(y) двузначная:

$$y \to \quad x_1 = h_1(y), \quad x_2 = h_2(y)$$

$$p_Y(y) = p_X(h_1(y)) \cdot |h_1'(y)| + p_X(h_2(y)) \cdot |h_2'(y)|$$

Многомерные случайные величины

Совокупность случайных величин:

$$\mathbf{X} = \left| X_1, X_2 \ldots X_n \right|$$ - n-мерный вектор

Плотность вероятности вектора - скаляр

$$p(\mathbf{x}) \equiv p(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \frac{P\left(x_1 \le X_1 < x_1 + \Delta x_1, \cdots x_n \le X_n < x_n + \Delta x_n\right)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n}$$

Для ГСВ:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \left(\det\left(\mathbf{R}_\mathbf{X}\right)\right)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\mathbf{x} - \mathbf{m}_\mathbf{X}\right)^{\text{т}} \mathbf{R}_\mathbf{X}^{-1} \left(\mathbf{x} - \mathbf{m}_\mathbf{X}\right) \right\}$$

$$\mathbf{R}_\mathbf{X} = M\left[\left(\mathbf{X} - \mathbf{m}_\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{X} - \mathbf{m}_\mathbf{X}\right)^{\text{т}} \right]$$

Совместная и условная плотности вероятности

$$p(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\left(x\le X<x+\Delta x,\ y\le Y<y+\Delta y\right)}{\Delta x\Delta y}$$

$$p(x)=\int_Y p(x,y)dy$$

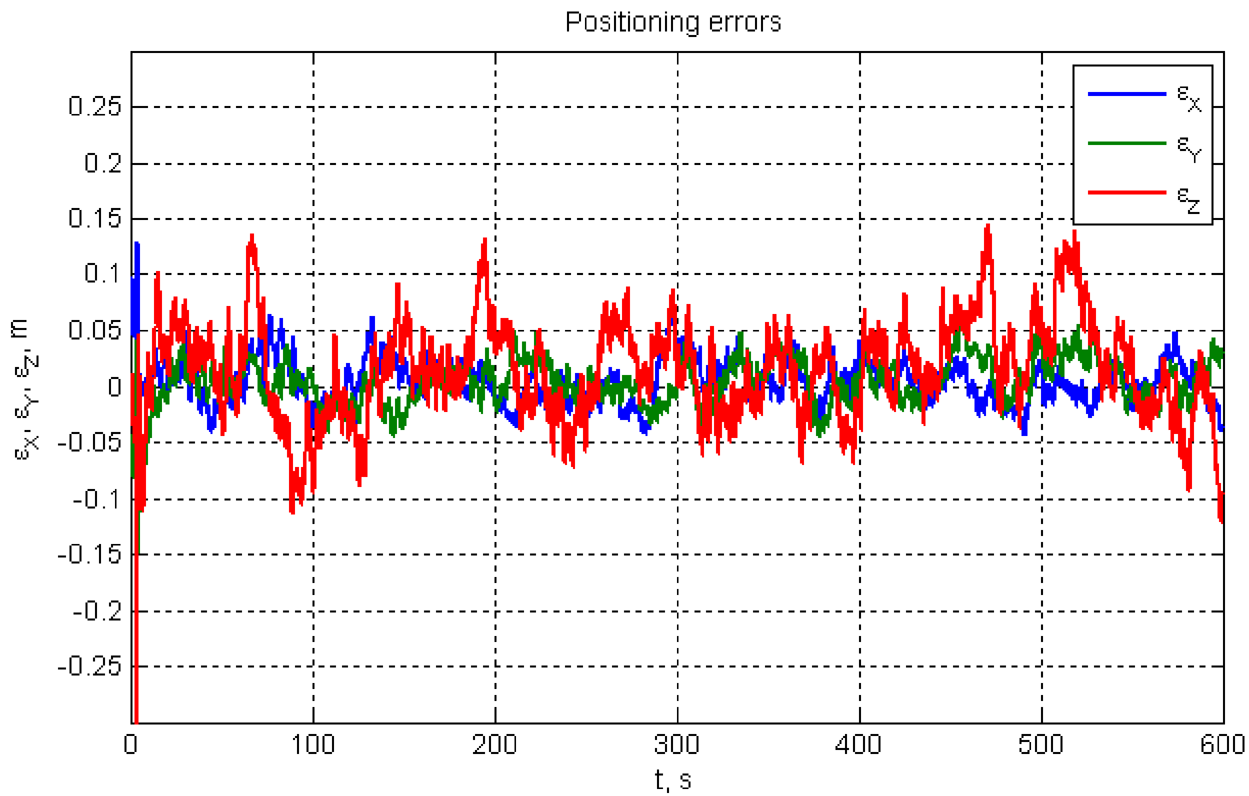
$$p\left(x,y\right)=p\left(x\,|\,y\right)p\left(y\right)$$

Если x и y независимы, то $p\left(x,y\right)=p\left(x\right)p\left(y\right)$

Случайные процессы

-Случайный процесс

- Случайная последовательность



Описывается совокупностью ПВ:

$$p\left(x_1\left(t_1\right)\right), p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\right), \ldots, p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right) \ldots x_n\left(t_n\right)\right)$$

Стационарность СП

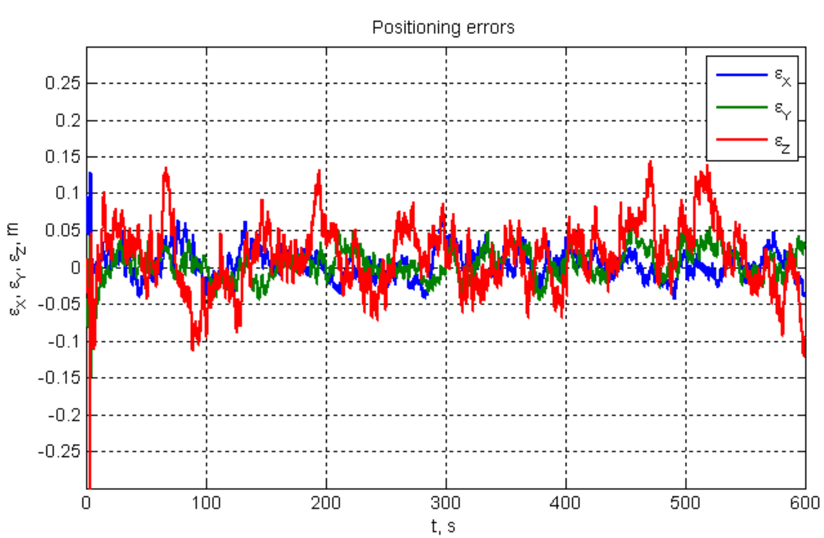
Стационарность в узком смысле

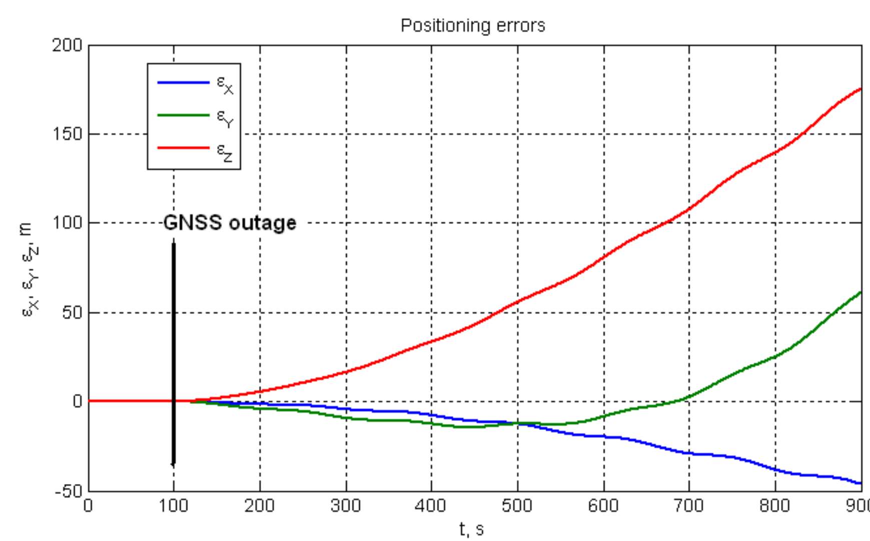
$$p\left(x\left(t_1-\tau\right),x\left(t_2-\tau\right)\ldots x\left(t_m-\tau\right)\right)=p\left(x\left(t_1\right),x\left(t_2\right)\ldots x\left(t_m\right)\right)$$

Стационарность в широком смысле

$$m_X=const,\quad D_X<\infty$$

$$R_X\left(t_1,t_2\right)=M\left[x\left(t_1\right)x\left(t_2\right)\right]=R_X\left(t_2-t_1\right)$$





Корреляционная функция и спектральная плотность СП

$$АКФ: \quad R_X(\tau) = M\left[x(t)\,x(t-\tau)\right]$$

$$ВКФ: \quad R_{XY}(\tau) = M\left[x(t)\,y(t-\tau)\right]$$

$$СПМ: \quad S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Гауссовские случайные процессы

Гауссовская случайная последовательность

$$\mathbf{x} = \left| x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_n(t_n) \right|$$

Описывается гауссовской совместной плотностью вероятности

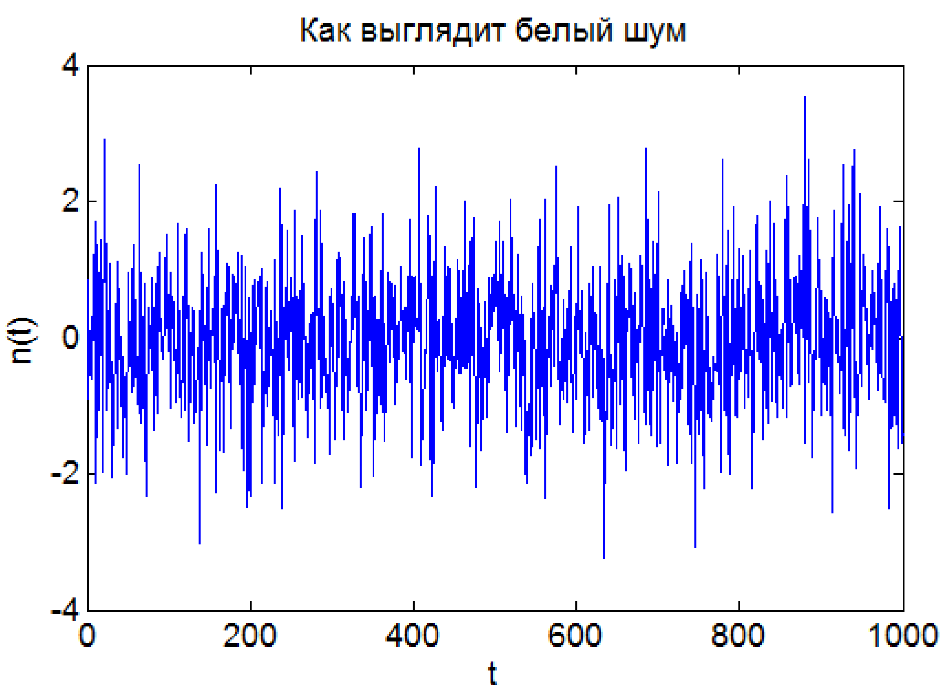
$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - M[\mathbf{X}]\right)^T \mathbf{R}_X^{-1} \left(\mathbf{x} - M[\mathbf{X}]\right)\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\mathbf{R}_X)}}$$

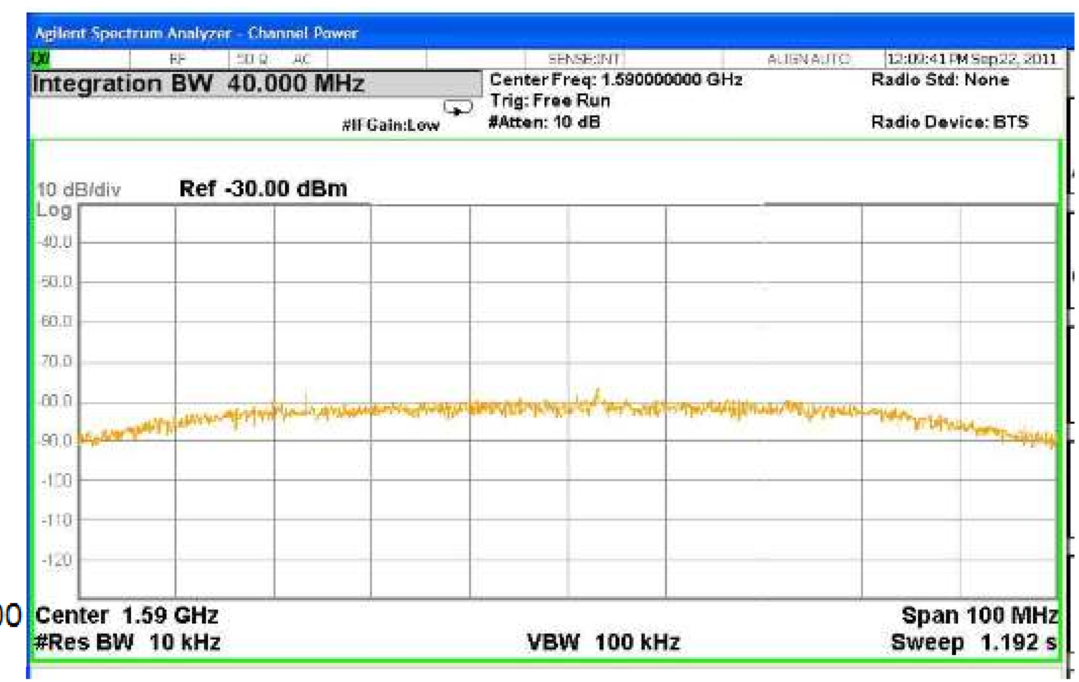
Белый гауссовский шум

$$n(t) \to R(\tau) = M\left[n(t)\,n(t+\tau)\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Дискретный белый гауссовский шум (ДБГШ)

$$n_i \to \mathbb{N}(0,\sigma_n) \qquad R_{i,j} = M\left[n_i n_j\right] = \sigma_n^2 \delta_{i,j} \qquad \text{если} \quad n_i = \frac{1}{T}\int_{t_{i-1}}^{t_i} n(t)\,\mathrm{d}t, \ \text{то} \quad \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2T}$$





Марковские случайные процессы

Совместная ПВ для конечной точки процесса:

$$p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\ldots x_n\left(t_n\right)\right) = p\left(x_n\left(t_n\right) \mid x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\ldots x_{n-1}\left(t_{n-1}\right)\right) p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\ldots x_{n-1}\left(t_{n-1}\right)\right)$$

Для марковского случайного процесса будущее не зависит от прошлого, а зависит только от настоящего, т.е.

$$p\left(x_n\left(t_n\right) \mid x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\ldots x_{n-1}\left(t_{n-1}\right)\right) = p\left(x_n\left(t_n\right) \mid x_{n-1}\left(t_{n-1}\right)\right)$$

Стохастическое уравнение диффузионного МП:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right) + \mathbf{g}\left(\mathbf{x}, t\right)\xi\left(t\right), \quad \mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x}_0$$ - для непрерывного времени

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1}, k-1\right) + \mathbf{g}\left(\mathbf{x}_{k-1}, k-1\right)\xi_{k-1}$$ - для дискретного времени

Гауссовские марковские процессы

Описываются линейными стохастическими уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)\xi(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$ - для непрерывного времени

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\boldsymbol{\xi}_{k-1}$$ - для дискретного времени

$$p\left(\mathbf{x}_k(t_k) \,|\, \mathbf{x}_{k-1}(t_{k-1})\right)$$ - гауссовская

Винеровский процесс

$$w(t)=\int_0^t n(\tau)\,d\tau \qquad D_w(t)=M\left[w^2(t)\right]=\frac{N_0}{2}t$$

Винеровский процесс в дискретном времени

$$w_k=w_{k-1}+n_kT, \qquad n_k\to\mathbb{N}(0,\sigma_n),\ \sigma_n^2=\frac{N_0}{2T}$$

Экспонециально коррелированный процесс

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\alpha x(t) + \sqrt{2\alpha\sigma^2}\,n(t); \qquad R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau)$$

$$x_k = \exp(-\alpha T)\,x_{k-1} + \sigma\sqrt{1-\exp(-2\alpha T)}\,n_{k-1}$$